Questions MSE205 ResMat2025

Lundi 12 mai: Réponses à vos questions rassemblées sur

Le fichier partagé MSE 205 ResMat, Revision, Questions :
(avec votre adresse…@epfl.ch)

https://docs.google.com/spreadsheets/d/1LHQFQ5gnNkiIUtY5Z1SWU3cbkvB4aol0rhD8uIN2iBQ/edit?usp=sharing

Quand utiliser Castigliano ?

Flexion		
Theorie	castigliano vs superposition	Je n'arrive pas bien à distinguer dans quel cas Castigliano est plus approprié que la superposition et vice-versa.

— Single load P

$$U = \frac{P\delta}{2} \qquad U = \frac{M\theta}{2}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

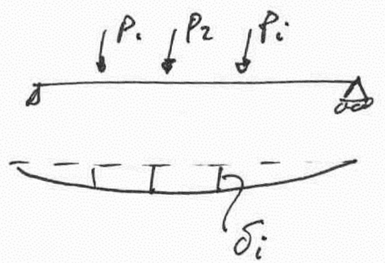
$$\delta = \frac{2U}{P} \qquad \theta = \frac{2U}{M}$$

δ = déflection au point où P est appliqué

θ = angle rotation au point où M est appliqué

— Castigliano

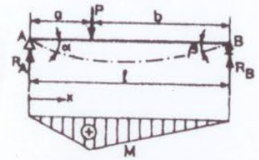
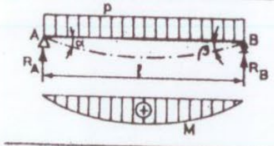
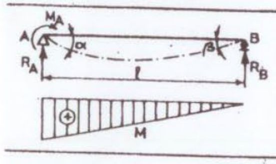
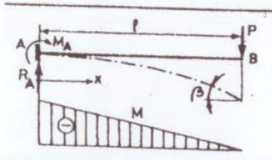
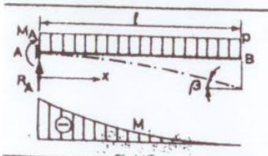
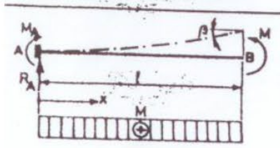
$$\delta_i = \frac{\partial U}{\partial P_i}$$



Pour calculer les déplacements localisés via l'énergie de déformation des poutres dont le système de charges est plus complexe que ceux des 6 cas et de leurs superpositions.

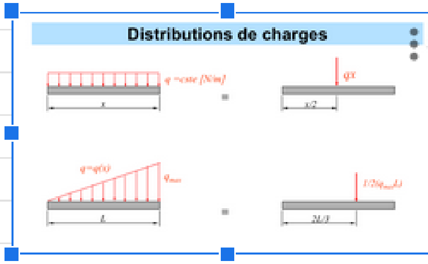
Theorème de Castigliano *: La dérivée partielle du travail* ***des forces extérieures*** *par rapport à une force est égale au déplacement du point d'application selon la ligne d'action de cette force.*
Ainsi la dérivée partielle du travail des forces extérieures par rapport à un couple (mécanique) détermine la rotation de la poutre au point de la section où s'applique ce couple.

Flexion

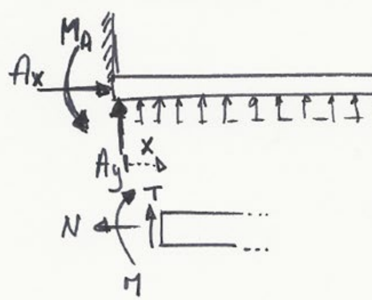
Cas de charge	Reactions	M_{max}	Elastique	Rotations	Fleches
	$R_A = \frac{P\,b}{\ell}$ $R_B = \frac{P\,a}{\ell}$	$+\frac{P\,a\,b}{\ell}$ pour x=a	pour $x < a$: $y_1 = \frac{P}{6\,\ell E I}\left(2\,a b^2\,x + a^2 b\,x - b\,x^3\right)$ pour $x > a$: $y_2 = \frac{P}{6\,\ell E I}\left(2\,a^2 b(\ell - x) + a b^2(\ell - x) - a(\ell - x)^3\right)$	$\alpha = \frac{P\,ab\,(\ell + b)}{6\,\ell E I}$ $\beta = \frac{-Pab\,(\ell + a)}{6\,\ell E I}$	Pour $x = a$ $\quad f_a = \frac{P\,a^2\,b^2}{3\,\ell E I}$ $f = f_{max}$ pour $x = a\sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2\,b}{3\,a}}$ si $a > b$ pour $x = \ell - b\sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2\,a}{3\,b}}$ si $a < b$ Si $a = b = \ell/2$ $\quad f_{max} = \frac{P\,\ell^3}{48\,E I}$
	$R_A = \frac{p\,\ell}{2}$ $R_B = \frac{p\,\ell}{2}$	$+\frac{p\,\ell^2}{8}$	$y = \frac{p}{24\,E I}\left(x^4 - 2\,\ell\,x^3 + \ell^3\,x\right)$	$\alpha = \frac{p\,\ell^3}{24\,E I}$ $\beta = \frac{-p\,\ell^3}{24\,E I}$	$f_{max} = \frac{5}{384}\,\frac{p\,\ell^4}{E I}$ pour $x = \frac{\ell}{2}$
	$R_A = -\frac{M}{\ell}$ $R_B = +\frac{M}{\ell}$	M_A	$y = \frac{M}{6\,\ell E I}\left(x^3 - 3\,\ell\,x^2 + 2\,\ell^2\,x\right)$	$\alpha = \frac{M\,\ell}{3\,E I}$ $\beta = \frac{-M\,\ell}{6\,E I}$	$f_{max} = \frac{M\,\ell^2\,\sqrt{3}}{27\,E I}$ pour $x = \ell\,(1 - \frac{\sqrt{3}}{3})$
	$R_A = P$ $M_A = -P\,\ell$	$-P\,\ell$ pour x=0	$y = \frac{P}{6\,E I}\left(3\,\ell\,x^2 - x^3\right)$	$\alpha = 0$ $\beta = \frac{P\,\ell^2}{2\,E I}$	$f_{max} = \frac{P\,\ell^3}{3\,E I}$ pour $x = \ell$
	$R_A = p\,\ell$ $M_A = \frac{-p\,\ell^2}{2}$	$\frac{-p\,\ell^2}{2}$ pour x=0	$y = \frac{p}{24\,E I}\left(6\,\ell^2\,x^2 - 4\,\ell\,x^3 + x^4\right)$	$\alpha = 0$ $\beta = \frac{p\,\ell^3}{6\,E I}$	$f_{max} = \frac{p\,\ell^4}{8\,E I}$ pour $x = \ell$
	$R_A = 0$ $M_A = M$	M=const.	$y = \frac{-M}{2\,E I}\,x^2$	$\alpha = 0$ $\beta = \frac{-M\ell}{E I}$	$f_{max} = \frac{-M\ell^2}{2\,E I}$ Pour $x = \ell$

Intensités équivalentes de moments

distributions de charges	Les relations sur l'image sont ils toujours vraies aussi si il y a des encastrements ?



Encastrement



$A_x = 0$

$A_y = -qL$

$-M_A = qL \cdot \frac{L}{2} = q\frac{L^2}{2}$

$N = -A_x = 0$

$T = A_y + qx = -qL + qx$

$M = -M_A + A_y x + qx\frac{x}{2}$

$= \frac{qL^2}{2} - qLx + \frac{qx^2}{2}$

en A $x = 0 \Rightarrow T = -qL$

en B $x = L \Rightarrow T = 0$

en A $x = 0 \Rightarrow M = \frac{qL^2}{2}$

en B $x = L \Rightarrow M = 0$

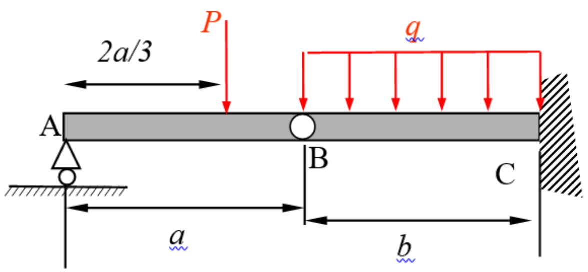
M_A : Réaction agissant sur la poutre

! M(x)

Questions sur les exercices		
	exo 9	Pourquoi, pour le calcul de l'angle, on considère que la partie AB est représentée par le cas 1 tandis que, pour le calcul de la flèche, on utilise le cas 4.

9.1 Superposition

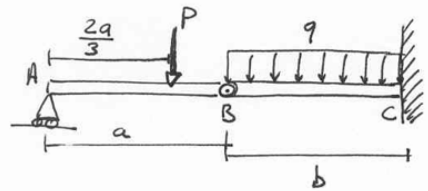
Une poutre en appui en A et encastrée en C est constituée de deux éléments reliés par une charnière en B. Elle subit une charge ponctuelle P et une charge continue q. Déterminez les équations qui vous permettent de calculer le déplacement vertical de B et l'angle de la déformée en A.

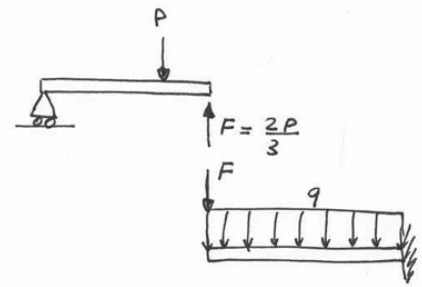


charnière =
réaction F et action F,
sans moment transmis,
comme si 2 poutres…

Superpositions.

La charnière en B permet les rotations tout en liant les deux poutres. L'équilibre de la poutre AB permet de déterminer la force F qui agit sur la poutre BC. Le déplacement de B est calculé via la poutre BC. L'angle en A est donné par ce déplacement auquel s'ajoute la contribution de P sur la poutre AB qui est en flexion 3 points.



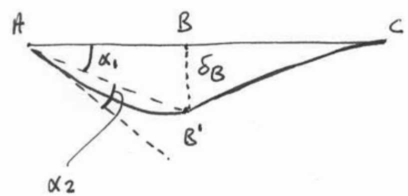


- $P \cdot \frac{2a}{3} = F \cdot a$

  $F = \frac{2P}{3}$

- cas 5 et 4 → $\delta_B = \frac{qb^4}{8EI} + \frac{Fb^3}{3EI}$

  $= \frac{qb^4}{8EI} + \frac{2Pb^3}{9EI}$



- $\alpha_1 = \delta_B / a = \frac{qb^4}{8aEI} + \frac{2Pb^3}{9aEI}$

cas 1 → $\alpha_2 = \frac{Pab(L+b)}{6LEI}$

avec $a = \frac{2a}{3}$, $b = \frac{a}{3}$, $L = a$

$\alpha_2 = \frac{4Pa^2}{81EI}$

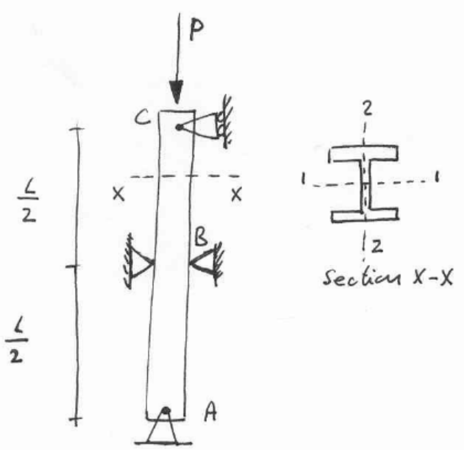
$\alpha_A = \alpha_1 + \alpha_2$

Flambage, rupture		
Theorie		comment on sait si notre poutre est encastrée ou artciulée etc??? comment adapter la formule de Pmax du flambage en conséquence ?

Une colonne verticale de section en I et d'une longueur de 8 mètres est supportée à ses 2 extrémités et compressée par une force axiale P. A sa mi-hauteur B elle est maintenue latéralement selon l'axe 1-1.
La colonne est en acier (Module 200 GPa et seuil plastique 300 MPa). Ses caractéristiques géométriques sont $I_1 = 3060$ cm^4, $I_2 = 162$ cm^4, S=39.5 cm^2
Déterminer la charge de flambage critique en prenant un facteur de sécurité de 2.5.

axe 1-1 ?
Supports ?

La poutre est supportée en A et C sans encastrement. Les rotations en A et C sont donc possibles.
Le moment d'inertie I_1 est plus grand que I_2, les axes 1-1 et 2-2 sont donc identifiés.
Selon les résultats, le flambage sur L/2 débute à une charge critique avant celui sur L.
La contrainte dans le matériau va augmenter jusqu'au flambage sur L.



- Flambage dans le plan de la figure

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E I_2}{(L/2)^2} = \frac{4\pi^2 E I_2}{L^2}$$

$$P_{cr1} = 200 \text{ kN}$$

- Flambage perpendiculaire

$$P_{cr2} = \frac{\pi^2 E I_1}{L^2} = 943{,}8 \text{ kN}$$

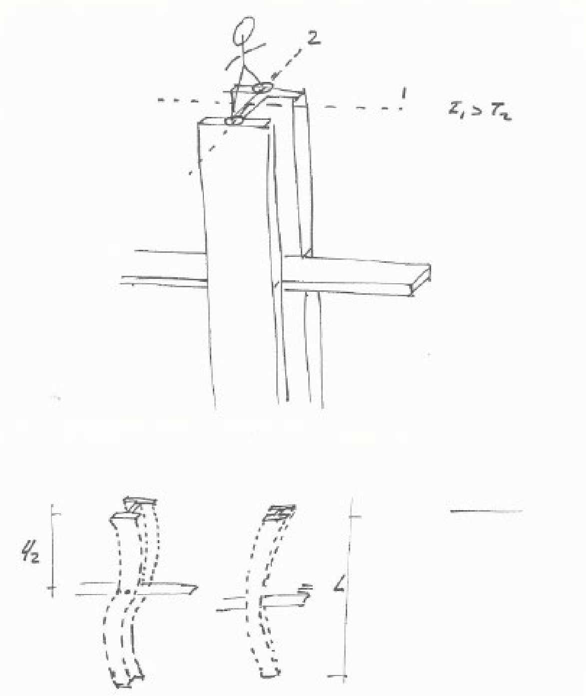
$\Rightarrow$ $P_{critique}$ est $P_{cr1} = 200$ kN $< P_{cr2}$

- Contrainte critique

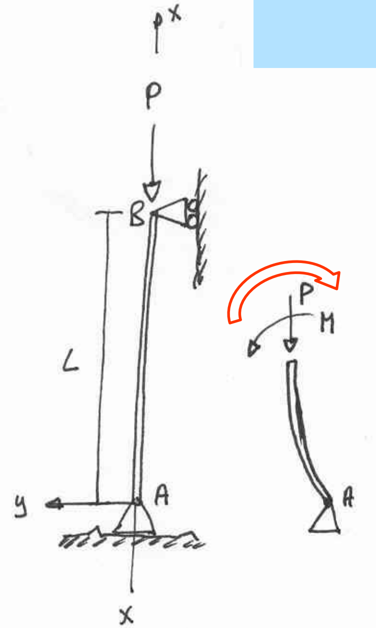
$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr2}}{S} = 238{,}9 \text{ MPa} \leq 300 \text{ MPa}$$

- charge admise

$$P_a = \frac{P_{cr}}{2{,}5} = 79{,}9 \text{ kN}$$



Flambage



$$EIy'' = -M$$

$$M = +Py$$

$$EIy'' + Py = 0$$

avec $k = \sqrt{\frac{P}{EI}}$ ①

$$y'' + k^2 y = 0$$

$$y = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx$$

$y(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \Rightarrow y = C_1 \sin kx$ ②

$y(L) = 0 \Rightarrow C_1 \sin kL = 0$

si $C_1 = 0 \xRightarrow{②} y = 0$ colonne stable

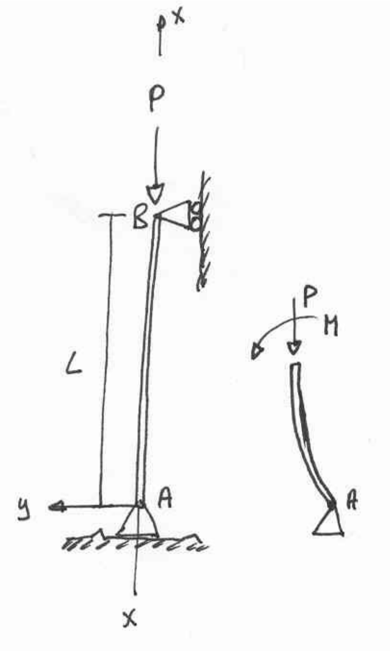
si $\sin kL = 0 \Rightarrow kL = 0, \pi, 2\pi \ldots\ldots$

$kL = 0 \Rightarrow P = 0$ pas d'intérêt

donc $kL = n\pi$ $n = 1, 2, 3 \ldots$

exo 10.1	Dans le cours la formule d'Euler été définie comme ../(2L)^2 mais dans la correction je vois pas où le facteur 2 s'annule ?

Flambage



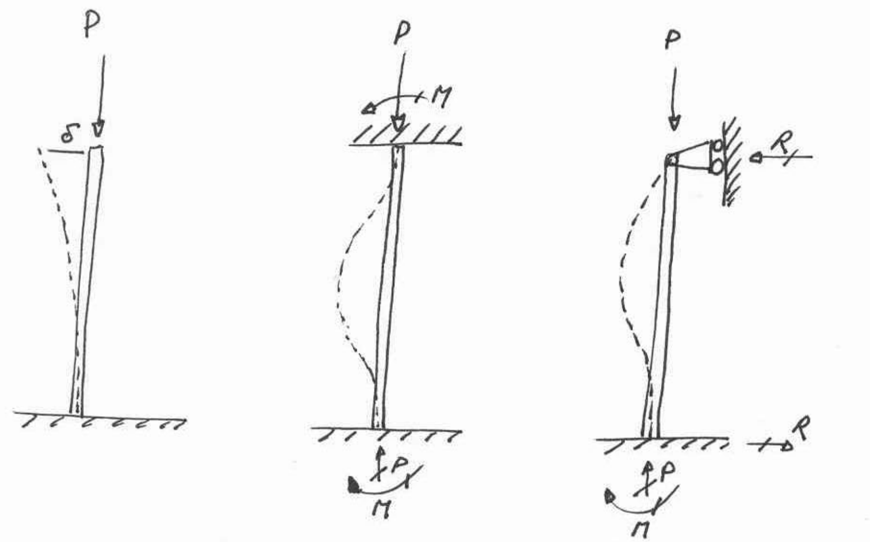
donc $kL = n\pi$ $\quad n = 1, 2, 3 \ldots$

$① \Rightarrow P = \frac{n^2\pi^2 EI}{L^2}$

$\Rightarrow y = C_1 \sin kx = C_1 \sin \frac{n\pi x}{L}$

$n=1 \Rightarrow P_{critique} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$

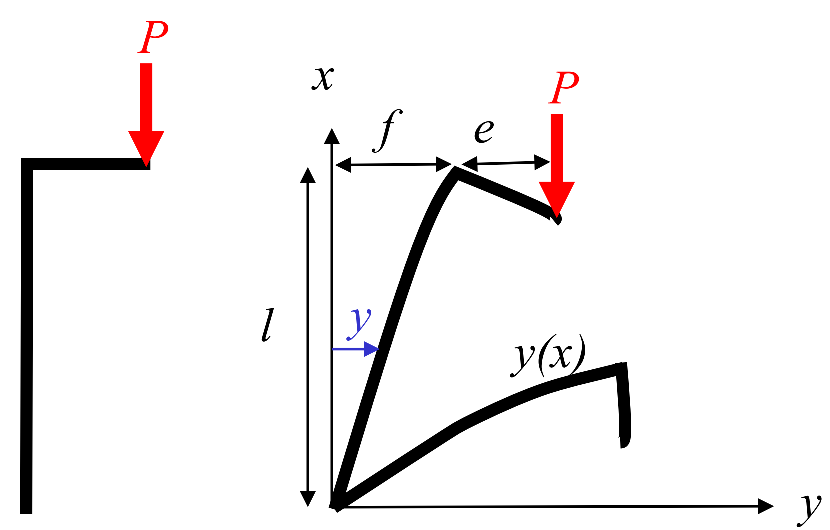
$\sigma_{critique} = \frac{P_{critique}}{S}$



$y'' + k^2 y = k^2 \delta$

$y'' + k^2 y = \frac{R}{EI}(L-x)$

Flambage



$$\left.\begin{aligned} y'' &= -\frac{M}{EI} \\ M &= -P(f+e-y) \end{aligned}\right\} \quad y'' = \frac{P}{EI}(f+e-y)\ donc \quad y'' + \frac{P}{EI}y = \frac{P}{EI}(f+e)$$

La solution est une sinusoïde

$$y = e\left(\frac{1-\cos kx}{\cos kl}\right)$$

$$avec\ \ k = \sqrt{\frac{P}{E \cdot I}}$$

$$y \rightarrow \infty \quad si\ \cos kl = 0$$

$$\Rightarrow kl = \pi/2\ ,\ 3\pi/2 \ldots$$

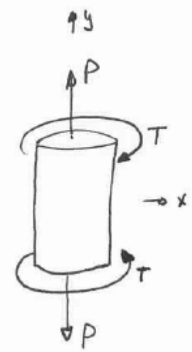
P_c *la charge critique qui provoque le flambage*

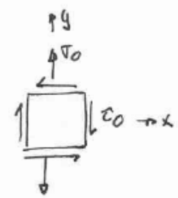
$$\boxed{P_C = \frac{\pi^2 EI}{(2l)^2} \quad \text{charge d'Euler}}$$

Matière Examen	Est-ce que l'examen B se focalisera uniquement sur la 2e partie du cours ou sera-il sur toute la matière du semestre?

10.2 Révision Hélicoptère

L'axe cylindrique du rotor d'un hélicoptère entraine la rotation des pales qui soulèvent l'hélicoptère dans les airs. L'axe est donc soumis à de la torsion et de la traction.
Pour un axe de 50 mm de diamètre transmettant un moment de torsion de 2.4 kNm et une force axiale de 125 kN, déterminez les contraintes maximales dans l'axe du rotor.





$$\sigma_0 = \frac{P}{A} = \frac{4P}{\pi d^2} = 63{,}6\ MPa$$

$$\tau_0 = \frac{M_t \cdot r}{I_p} = \frac{16\ M_t}{\pi d^3} = 97{,}8\ MPa$$

- contraintes principales

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

avec $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = \sigma_0$, $\tau_{xy} = -\tau_0$

$$\sigma_{1,2} = 32 \pm 103\ MPa$$

$\sigma_1 = 135\ MPa$ contrainte max en traction
$\sigma_2 = -71\ MPa$ contrainte max en compression
dans le rotor

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = 103\ MPa$$

Examen B (cf Moodle)

Lundi 19 mai 15h15-17h examen B (2/3) en CO3

Vous n'avez droit à aucun document (cours, livres etc ...) autre que 1 feuille recto de vos formules et le formulaire des cas de flexion. Les calculatrices sont autorisées.

???